

PRÓBNA MATURA z WSiP

Egzamin maturalny z matematyki dla klasy 3

Poziom podstawowy

Luty 2018

Zasady oceniania zadań



Kartoteka

Numer zadania	Wymagania ogólne	Wymagania szczegółowe Uczeń:	Maksymalna liczba punktów
1	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	posługuje się pojęciem przedziału liczbowego (1.8p)	1
2	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	wykonuje obliczenia procentowe (1.8p)	1
3	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	używa wzorów skróconego mnożenia (2.1p)	1
4	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	wykorzystuje definicję logarytmu i stosuje w obliczeniach wzory na logarytm iloczynu, logarytm ilorazu i logarytm potęgi o wykładniku naturalnym (1.6p)	1
5	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	korzysta z własności iloczynu przy rozwiązywaniu równań typu $x(x+1)(x-7)=0$ (3.7p)	1
6	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	wykorzystuje interpretację geometryczną układu równań pierwszego stopnia z dwiema niewiadomymi (3.2p)	1
7	I. Wykorzystanie i tworzenie informacji	oblicza potęgi o wykładnikach wymiernych i stosuje prawa działań na potęgach o wykładnikach wymiernych (1.4p)	1
8	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	oblicza ze wzoru wartość funkcji dla danego argumentu; posługuje się poznanymi metodami rozwiązywania równań do obliczenia, dla jakiego argumentu funkcja przyjmuje daną wartość (4.2p)	1
9	I. Wykorzystanie i tworzenie informacji	określa funkcję za pomocą wzoru, tabeli, wykresu, opisu słownego (4.1p)	1
10	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji liniowej (4.7p)	1
11	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	interpretuje współczynniki występujące we wzorze funkcji kwadratowej (2.10p)	1
12	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	wyznacza wyrazy ciągu określonego wzorem ogólnym (5.1p)	1
13	I. Wykorzystanie i tworzenie informacji	stosuje wzór na n -ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (5.3p)	1
14	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	stosuje wzór na n -ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (5.4p)	1
15	IV. Użycie i tworzenie strategii	stosuje trygonometrię do obliczania długości odcinków, miar kątów, pól powierzchni i objętości (9.6p)	1

16	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	korzysta z własności kątów i przekątnych w prostokątach, równoległobokach, rombach i trapezach (10.8G)	1
17	III. Modelowanie matematyczne	korzysta z własności stycznej do okręgu (7.2p)	1
18	I. Wykorzystanie i tworzenie informacji	rozpoznaje graniastosłupy i ostrosłupy (11.1G)	1
19	III. Modelowanie matematyczne	rozpoznaje graniastosłupy i ostrosłupy (11.1G)	1
20	I. Wykorzystanie i tworzenie informacji	oblicza pole powierzchni i objętość graniastosłupa prostego, ostrosłupa, walca, stożka i kuli (11.2G)	1
21	I. Wykorzystanie i tworzenie informacji	oblicza pole powierzchni i objętość graniastosłupa prostego, ostrosłupa, walca, stożka i kuli (11.2G)	1
22	I. Wykorzystanie i tworzenie informacji	wyznacza średnią arytmetyczną i medianę zestawu danych (9.4G)	1
23	III. Modelowanie matematyczne	zlicza obiekty w prostych sytuacjach kombinatorycznych, niewymagających użycia wzorów kombinatorycznych, stosuje regułę mnożenia i regułę dodawania (10.2p)	1
24	III. Modelowanie matematyczne	oblicza prawdopodobieństwa w prostych sytuacjach kombinatorycznych (10.3p)	1
25	I. Wykorzystanie i tworzenie informacji	oblicza średnią ważoną i odchylenie standardowe zestawu danych (także w wypadku danych odpowiednio pogrupowanych) (10.1p)	1
26	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	rozwiązuje nierówności kwadratowe z jedną niewiadomą (2.5p)	2
27	II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	rozwiązuje proste równania wymierne (2.8p)	2
28	V. Rozumowanie i argumentacja	używa wzorów skróconego mnożenia (2.1p)	2
29	V. Rozumowanie i argumentacja	korzysta z własności kątów i przekątnych w prostokątach, równoległobokach, rombach i trapezach (10.8 G)	2
30	III. Modelowanie matematyczne	oblicza prawdopodobieństwa w prostych sytuacjach kombinatorycznych (10.3p)	2
31	IV. Użycie i tworzenie strategii	korzysta z własności stycznej do okręgu (7.2p)	2
32	IV. Użycie i tworzenie strategii	stosuje wzór na n -ty wyraz i na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego (5.3p)	4
33	III. Modelowanie matematyczne	wykorzystuje własności funkcji liniowej i kwadratowej do interpretacji zagadnień geometrycznych (6.12p)	4
34	III. Modelowanie matematyczne	oblicza pole powierzchni i objętość graniastosłupa prostego, ostrosłupa, walca, stożka i kuli (11.2G)	5

Klucz odpowiedzi do zadań zamkniętych

Numer zadania	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Poprawna odpowiedź	B	C	D	C	C	C	D	B	C	B	C	B	D

Numer zadania	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
Poprawna odpowiedź	D	B	A	A	B	D	C	A	B	A	B	C

Za każdą poprawną odpowiedź w zadaniach zamkniętych uczeń otrzymuje **1 punkt**.

Schemat oceniania zadań otwartych**UWAGA OGÓLNA**

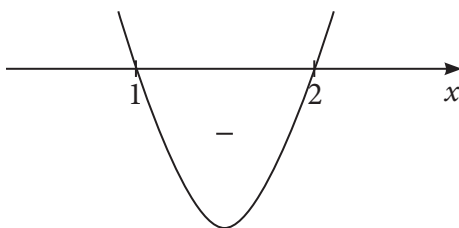
- Za prawidłowe rozwiązanie zadania inną metodą niż przewidziana w schemacie punktowania należy przyznać zdającemu maksymalną liczbę punktów.
- Za częściowe rozwiązanie zadania inną metodą niż przewidziana w schemacie rozwiązywania należy przyznać zdającemu liczbę punktów adekwatną do wykonanych czynności.

Zadanie 26. (0–2)**Przykładowe rozwiązanie****I sposób**

$$\begin{aligned}
 x(x-1) &\leq (4-x)(x-1) \\
 x(x-1) - (4-x)(x-1) &\leq 0 \\
 (x-1)(x-4+x) &\leq 0 \\
 (x-1)(2x-4) &\leq 0 \\
 2(x-1)(x-2) &\leq 0
 \end{aligned}$$

II sposób

$$\begin{aligned}
 x(x-1) &\leq (4-x)(x-1) \\
 x^2 - x &\leq 4x - 4 - x^2 + x \\
 2x^2 - 6x + 4 &\leq 0 \\
 x^2 - 3x + 2 &\leq 0 \\
 \Delta = 1 \quad x_1 = \frac{3-1}{2} = 1, \quad x_2 = \frac{3+1}{2} = 2
 \end{aligned}$$



Odpowiedź: Zbiorem rozwiązań danej nierówności jest przedział $\langle 1; 2 \rangle$.

Schemat oceniania**Zdający otrzymuje 1 p.**

gdy:

- zapisze nierówność w postaci $2(x-1)(x-2) \leq 0$ lub obliczy pierwiastki trójmianu $x^2 - 3x + 2$ i na tym zakończy lub błędnie wyznaczy zbiór rozwiązań nierówności albo

- popełni błąd rachunkowy i błędnie wyznaczy pierwiastki (ale otrzyma dwa różne) i konsekwentnie do tego błędu rozwiąże nierówność.

Zdający otrzymuje 2 p.gdy poda zbiór rozwiązań danej nierówności: $\langle 1; 2 \rangle$.**Zadanie 27. (0-2)****Przykładowe rozwiązanie**Przy założeniu $x \neq 2$ dane równanie jest równoważne równaniu $(x-2)^2 = 2(x-2) - 1$.**I sposób**

$$x-2 = 2 - \frac{1}{x-2}$$

$$(x-2)^2 = 2(x-2) - 1$$

$$(x-2)^2 - 2(x-2) + 1 = 0$$

$$[(x-2)-1]^2 = 0$$

$$(x-3)^2 = 0$$

$$x = 3$$

II sposób

$$x-2 = 2 - \frac{1}{x-2}$$

$$(x-2)^2 = 2(x-2) - 1$$

$$x^2 - 4x + 4 = 2x - 4 - 1$$

$$x^2 - 6x + 9 = 0$$

$$\Delta = 0 \quad x_1 = x_2 = \frac{6}{2} = 3$$

Odpowiedź: Rozwiązaniem danego równania jest liczba 3.

Schemat oceniania**Zdający otrzymuje 1 p.**gdy zapisze dane równanie w postaci $[(x-2)-1]^2 = 0$ lub $x^2 - 6x + 9 = 0$ i na tym zakończy lub błędnie wyznaczy rozwiązanie równania.**Zdający otrzymuje 2 p.**gdy rozwiąże dane równanie: $x = 3$.

Zadanie 28. (0–2)**Przykładowe rozwiązanie**

Przekształcamy daną nierówność w sposób równoważny.

$$\begin{aligned} \left(\frac{a+2b}{2}\right)^2 &\leq \frac{a^2+4b^2}{2} \\ \frac{a^2+4ab+4b^2}{4} - \frac{a^2+4b^2}{2} &\leq 0 \\ \frac{a^2+4ab+4b^2-2a^2-8b^2}{4} &\leq 0 \\ -a^2+4ab-4b^2 &\leq 0 \\ a^2-4ab+4b^2 &\geq 0 \\ (a-2b)^2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Ostatnia z tych nierówności, a więc i dana nierówność, jest prawdziwa dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b , bo kwadrat liczby rzeczywistej jest zawsze nieujemny.

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje **1 p.**

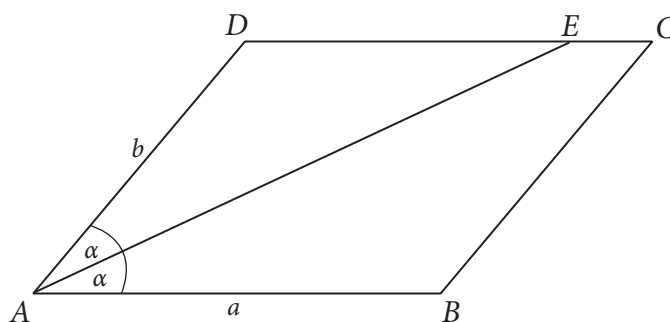
gdy zapisze daną nierówność w postaci $-a^2+4ab-4b^2 \leq 0$ lub $a^2-4ab+4b^2 \geq 0$.

Zdający otrzymuje **2 p.**

gdy przeprowadzi pełne rozumowanie.

Zadanie 29. (0–2)**Przykładowe rozwiązanie**

Z treści zadania wynika, że można przyjąć oznaczenia jak na rysunku poniżej.



Kąty EAB i AED są kątami naprzemianległymi, stąd mają takie same miary, ponieważ odcinki AB i CD są równoległe. Trójkąt AED jest więc trójkątem równoramiennym o ramionach AD i DE , zatem $|DE| = b$. Stąd $|EC| = |CD| - b$. Ponieważ $|BC| = b$, mamy $|EC| = |CD| - |BC|$, co należało wykazać.

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje 1 p.
gdy zauważy i zapisze, że trójkąt AED jest równoramienny.

Zdający otrzymuje 2 p.
gdy przeprowadzi pełne rozumowanie.

Zadanie 30. (0–2)**Przykładowe rozwiązanie**

	1	3	5	7	9
2	(2, 1)	(2, 3)	(2, 5)	(2, 7)	(2, 9)
4	(4, 1)	(4, 3)	(4, 5)	(4, 7)	(4, 9)
6	(6, 1)	(6, 3)	(6, 5)	(6, 7)	(6, 9)
8	(8, 1)	(8, 3)	(8, 5)	(8, 7)	(8, 9)

Każde zdarzenie elementarne jest parą, w której na pierwszym miejscu jest liczba wylosowana ze zbioru B , natomiast na drugim jest liczba wylosowana ze zbioru A .

$$|\Omega| = 4 \cdot 5 = 20$$

Wyniki sprzyjające zdarzeniu D : liczba wylosowana ze zbioru B jest większa od liczby wylosowanej ze zbioru A zostały w tabeli wyróżnione. Jest ich 10.

$$|D| = 10$$

Stąd, ponieważ wszystkie wyniki tego doświadczenia losowego są jednakowo prawdopodobne, mamy:

$$P(D) = \frac{|D|}{|\Omega|}$$

$$P(D) = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$$

Prawdopodobieństwo zdarzenia, że liczba wylosowana ze zbioru B jest większa od liczby wylosowanej ze zbioru A , jest równe $\frac{1}{2}$.

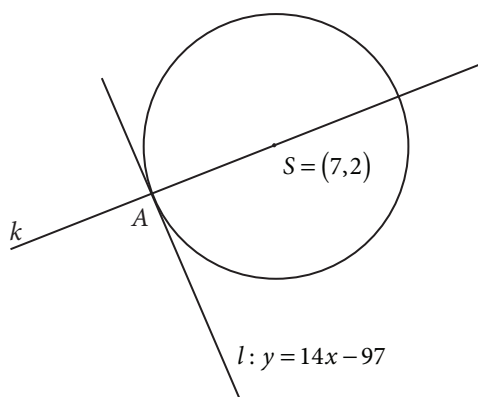
Schemat oceniania

Zdający otrzymuje 1 p.
gdy ustali liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych: $|\Omega| = 20$.

Zdający otrzymuje 2 p.
gdy obliczy prawdopodobieństwo zdarzenia, że liczba wylosowana ze zbioru B jest większa od liczby wylosowanej ze zbioru A : $\frac{1}{2}$.

Zadanie 31. (0–2)**Przykładowe rozwiązanie**

Sporządzamy rysunek schematyczny.



Ponieważ promień okręgu poprowadzony do punktu styczności z prostą jest do tej prostej prostopadły, znajdziemy równanie prostej k przechodzącej przez punkt S i prostopadłej do prostej l .

$$k: y = \frac{1}{14}x + b$$

Ponieważ $S \in k$, to:

$$2 = \frac{1}{14} \cdot 7 + b$$

$$b = \frac{3}{2}$$

$$k: y = \frac{1}{14}x + \frac{3}{2}$$

Ponieważ punkt A jest punktem wspólnym prostych k i l , współrzędne punktu A spełniają układ równań:

$$\begin{cases} y = \frac{1}{14}x + \frac{3}{2} \\ y = -14x - 97 \end{cases}$$

Rozwiążemy ten układ równań metodą przeciwnych współczynników.

$$y - y = \frac{1}{14}x + \frac{3}{2} + 14x + 97$$

$$14 \frac{1}{14}x = -98 \frac{1}{2}$$

$$x = -\frac{197}{2} : \frac{197}{14} = -7$$

$$\text{Zatem } y = \frac{1}{14} \cdot (-7) + \frac{3}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 1.$$

Odpowiedź: Współrzędne punktu styczności są równe $(-7, 1)$.

Schemat oceniania**Zdający otrzymuje 1 p.**gdy wyznaczy równanie prostej $k: y = \frac{1}{14}x + \frac{3}{2}$.**Zdający otrzymuje 2 p.**gdy obliczy współrzędne punktu styczności okręgu i prostej $l: (-7, 1)$.**Zadanie 32. (0–4)****Przykładowe rozwiązanie**Korzystając z wzoru na n -ty wyraz ciągu arytmetycznego, otrzymujemy:

$$a_k = -6 + (k-1) \cdot 2 = -6 + 2k - 2 = 2k - 8$$

$$a_{k+2} = -6 + (k+1) \cdot 2 = -6 + 2k + 2 = 2k - 4$$

$$a_{2k+3} = -6 + (2k+2) \cdot 2 = -6 + 4k + 4 = 4k - 2.$$

Ciąg (a_k, a_{k+2}, a_{2k+3}) jest geometryczny wtedy i tylko wtedy, gdy $(a_{k+2})^2 = a_k \cdot a_{2k+3}$.

Zatem

$$(2k-4)^2 = (2k-8)(4k-2)$$

$$4k^2 - 16k + 16 = 8k^2 - 4k - 32k + 16$$

$$4k^2 - 20k = 0$$

$$4k(k-5) = 0$$

$$k_1 = 0 \quad k_2 = 5.$$

Ponieważ $k \geq 1$, rozwiązaniem równania jest tylko $k = 5$ i tylko ciąg $(2, 6, 18)$ spełnia warunki zadania.**Schemat oceniania****Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania 1 p.**Poprawne wyznaczenie dwóch z trzech wyrazów ciągu geometrycznego w zależności od k .

$$a_k = 2k - 8$$

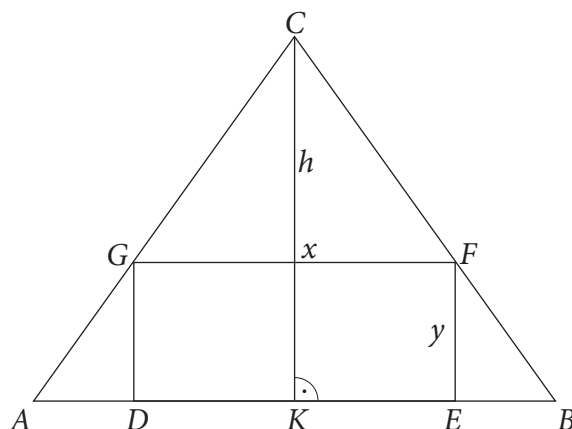
$$a_{k+2} = 2k - 4$$

$$a_{2k+3} = 4k - 2$$

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 p.Zapisanie równania $(2k-4)^2 = (2k-8)(4k-2)$.**Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3 p.**Rozwiązanie równania $(2k-4)^2 = (2k-8)(4k-2)$: $k = 0$ lub $k = 5$.**Rozwiązanie pełne 4 p.**Wyznaczenie $k = 5$ i ciągu geometrycznego $(2, 6, 18)$, spełniającego warunki zadania.

Zadanie 33. (0–4)**Przykładowe rozwiązanie**

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku, na którym $|DG| = y$, $|GF| = x$, $|CK| = h$.



Pole prostokąta $DEFG$ wyraża się wzorem $P = x \cdot y$, gdzie $x \in (0; 6)$, a $y \in (0; h)$. Znajdziemy związek między zmiennymi x i y , aby wyrazić to pole jako funkcję jednej zmiennej.

Obliczamy wysokość h trójkąta ABC .

$$h^2 + 3^2 = 5^2$$

$$h^2 = 25 - 9$$

$$h = 4$$

Trójkąty CKB i FEB są podobne, stąd

$$\frac{|CK|}{|KB|} = \frac{|FE|}{|EB|}$$

$$\frac{4}{3} = \frac{y}{3 - \frac{1}{2}x}$$

$$12 - 2x = 3y$$

$$y = -\frac{2}{3}x + 4.$$

Zatem $P(x) = x \cdot \left(-\frac{2}{3}x + 4\right) = -\frac{2}{3}x^2 + 4x$, gdzie $x \in (0; 6)$.

Rozważamy funkcję f określoną wzorem $f(x) = -\frac{2}{3}x^2 + 4x$. Jest to funkcja kwadratowa, która największą wartość przyjmuje dla $x_w = \frac{-4}{2 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)} = 3$, gdzie x_w jest pierwszą współrzędną wierzchołka paraboli – wykresu funkcji f .

Ponieważ P jest zawężeniem funkcji f do przedziału $(0; 6)$ oraz $x_w = 3 \in (0; 6)$, to prostokąt o największym polu wpisany w trójkąt ABC ma boki długości 3 i 2 $\left(y = -\frac{2}{3} \cdot 3 + 4 = 2\right)$.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania 1 p.

Obliczenie długości wysokości trójkąta ABC : $h = 4$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 p.

Zapisanie związku między długościami boków prostokąta $DEFG$: np. $\frac{4}{3} = \frac{y}{3 - \frac{1}{2}x}$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3 p.

Zapisanie wzoru na pole prostokąta $DEFG$ jako funkcji jednej zmiennej:

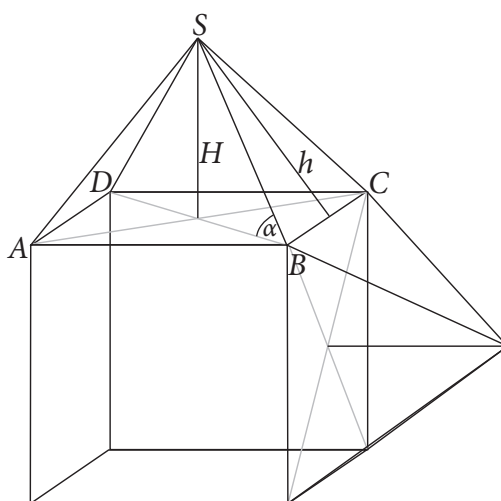
np. $P(x) = -\frac{2}{3}x^2 + 4x$, i zapisanie, że funkcja ta przyjmuje wartość największą dla x_w .

Rozwiązanie pełne 4 p.

Obliczenie długości boków prostokąta o największym polu wpisanego w trójkąt ABC : 3 i 2.

Zadanie 34. (0–5)**Przykładowe rozwiązanie**

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Obliczamy miarę kąta nachylenia krawędzi bocznej ostrosłupa do płaszczyzny jego podstawy.

$$\alpha = 120^\circ - 90^\circ = 30^\circ.$$

Przekątna BD ściany sześcianu ma długość $6\sqrt{2}$, stąd

$$\frac{H}{3\sqrt{2}} = \operatorname{tg} 30^\circ$$

$$H = 3\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \sqrt{6}.$$

Obliczamy objętość jednego ostrosłupa

$$V_o = \frac{1}{3} \cdot 6^2 \cdot \sqrt{6} = 12\sqrt{6} \text{ oraz objętość całej bryły}$$

$$V_B = 6^3 + 6 \cdot 12\sqrt{6} = 216 + 72\sqrt{6}.$$

Obliczamy długość wysokości ściany bocznej jednego ostrosłupa.

$$3^2 + (\sqrt{6})^2 = h^2$$

$$h^2 = 9 + 6 = 15$$

$$h = \sqrt{15}$$

Pole jednej ściany bocznej ostrosłupa jest zatem równe $P_s = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \sqrt{15} = 3\sqrt{15}$.

Stąd obliczamy pole powierzchni całej bryły.

$$P_B = 6 \cdot 4 \cdot 3\sqrt{15} = 72\sqrt{15}$$

Odpowiedź: Objętość bryły jest równa $216 + 72\sqrt{6}$, a jej pole powierzchni całkowitej wynosi $72\sqrt{15}$.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania 1 p.

Obliczenie miary kąta nachylenia krawędzi bocznej ostrosłupa do płaszczyzny jego podstawy: $\alpha = 30^\circ$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 p.

Obliczenie długości wysokości ostrosłupa: $H = \sqrt{6}$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 3 p.

Obliczenie długości wysokości ściany bocznej ostrosłupa: $h = \sqrt{15}$ lub obliczenie objętości bryły: $V_B = 216 + 72\sqrt{6}$.

Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) 4 p.

Obliczenie długości wysokości ściany bocznej ostrosłupa: $h = \sqrt{15}$ i obliczenie objętości bryły: $V_B = 216 + 72\sqrt{6}$ lub obliczenie pola powierzchni całkowitej bryły: $P_B = 72\sqrt{15}$.

Rozwiązanie pełne 5 p.

Obliczenie pola powierzchni całkowitej bryły: $P_B = 72\sqrt{15}$ oraz jej objętości: $V_B = 216 + 72\sqrt{6}$.